твердого тела можно представить состоящим из двух движений: поступательного вместе с какой-либо точкой тела и вращения его вокруг этой точки. В качестве точки, вместе с которой рассматривается поступательное движение, выбирают центр масс тела, так как для него имеется теорема о движении центра масс. К изучению движения тела вокруг, например, центра масс можно применить общие положения о движении тела вокруг неподвижной точки.

§ 1. КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Имеем твердое тело, одна из точек которого закреплена. Движение тела рассматривается относительно некоторой системы координат $Oxyz$ (рис. 132), начало которой находится в закрепленной точке тела. Вращение тела вокруг неподвижной точки в каждый момент времени есть вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\bar{\omega}$, направленной по этой оси. Для кинетического момента $\bar{K}_O$ относительно неподвижной точки, согласно его определению, имеем

$$\bar{K}_O=\sum_{k=1}^{N}\bar{r}_k\times m_k\bar{v}_k, \tag{1}$$

где $\bar{r}_k$ — радиус-вектор какой-либо точки тела; m_k — масса точки; $\bar{v}_k$ — скорость этой точки относительно выбранной системы отсчета. Для сплошного тела роль точек выполняют малые элементарные частицы тела, на N которых оно разбито.

Из кинематики известно, что скорости точек тела при его вращении вокруг неподвижной точки вычисляются по векторной формуле Эйлера

$$\bar{v}_k=\bar{\omega}\times\bar{r}_k=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x_k & y_k & z_k\end{vmatrix}=\bar{i}(\omega_y z_k-\omega_z y_k)+$$

$$+\bar{j}(\omega_z x_k-\omega_x z_k)+\bar{k}(\omega_x y_k-\omega_y x_k), \tag{2}$$

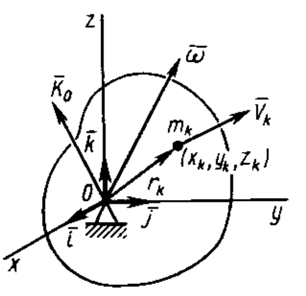

Рис. 132

которую в проекциях на оси координат, учитывая, что векторное произведение можно представить в виде определителя, выразим в форме

$$v_{kx}=\omega_y z_k-\omega_z y_k;\quad v_{ky}=\omega_z x_k-\omega_x z_k;$$
$$v_{kz}=\omega_x y_k-\omega_y x_k, \tag{2'}$$

где x_k, y_k, z_k — координаты точки тела с массой m_k.

Для проекции кинетического момента на ось Ox с учетом (2′) имеем

$$K_x=\sum_{k=1}^{N}m_k(y_k v_{kz}-z_k v_{ky})=\sum_{k=1}^{N}m_k[y_k(\omega_x y_k-\omega_y x_k)-$$
$$-z_k(\omega_z x_k-\omega_x z_k)]=\omega_x\sum_{k=1}^{N}m_k(y_k^2+z_k^2)-$$
$$-\omega_y\sum_{k=1}^{N}m_k x_k y_k-\omega_z\sum_{k=1}^{N}m_k x_k z_k. \tag{1'}$$

Проекции угловой скорости ω_x, ω_y, ω_z вынесены за знаки сумм, так как они не зависят от точек тела, по которым ведется суммирование. Суммы в (1′) представляют собой соответственно осевой J_x и центробежные J_{xy}, J_{xz} моменты инерции. С учетом этого для K_x и по аналогии для K_y и K_z получаем

$$\left.\begin{aligned}K_x&=J_x\omega_x-J_{xy}\omega_y-J_{xz}\omega_z;\\ K_y&=-J_{yx}\omega_x+J_y\omega_y-J_{yz}\omega_z;\\ K_z&=-J_{zx}\omega_x-J_{zy}\omega_y+J_z\omega_z.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

По формулам (3) вычисляются проекции на оси координат кинетического момента тела относительно его закрепленной точки. Эти проекции являются линейными функциями проекций угловой скорости вращения тела на те же оси координат. Кинетический момент $\bar{K}_O$ по проекциям определяется формулой

$$\bar{K}_O=K_x\bar{i}+K_y\bar{j}+K_z\bar{k}. \tag{1''}$$

Проекции на оси координат кинетического момента по формулам (3) можно вычислить как для осей, относительно которых рассматривается вращение тела (неподвижные оси), так и любых других подвижных осей, например скрепленных с вращающимся телом. Для неподвижных осей осевые и центробежные моменты инерции изменяются при вращении тела и, следовательно, зависят от времени вследствие изменения положения тела относительно этих осей. Для подвижных осей, скрепленных с телом, моменты инерции являются постоянными, не зависящими от времени, так как положение тела относительно этих осей не изменяется при его вращении. В случае проецирования кинетического момента на подвижные оси координат следует иметь в виду, что кинетический момент вычисляется для движения тела относительно неподвижных осей.

Если применить тензор инерции

$$J=\begin{pmatrix}J_x & -J_{xy} & -J_{xz}\\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz}\\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z\end{pmatrix}$$

и учесть правило умножения тензора на вектор-столбец $\bar{\omega}$, то (3) можно кратко выразить формулой

$$\bar{K}_O=J\bar{\omega}.$$

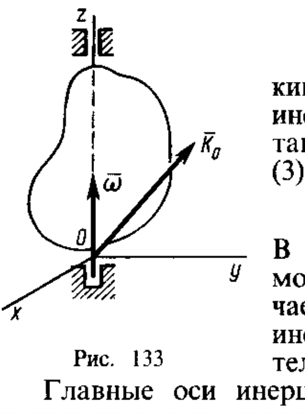

Рис. 133

Формулы (3) упрощаются для проекций кинетического момента на главные оси инерции для неподвижной точки O. Для таких осей координат $J_{xy}=J_{yz}=J_{zx}=0$ и из (3) получаем:

$$K_x=J_x\omega_x;\quad K_y=J_y\omega_y;\quad K_z=J_z\omega_z. \tag{4}$$

В этом случае проекции кинетического момента вычисляются так же, как и в случае, если бы каждая из главных осей инерции была неподвижной осью вращения тела.

Главные оси инерции для неподвижной точки O обычно подвижные оси, скрепленные с самим вращающимся телом. Только такие оси могут быть главными в течение всего времени вращения тела. Другие подвижные или неподвижные оси могут быть главными только в отдельные моменты времени.

Частный случай. Если имеем тело, которое вращается вокруг неподвижной оси Oz (рис. 133), то в этом случае вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ направлен по оси вращения и его проекции на две другие оси, перпендикулярные оси вращения, равны нулю, т. е. $\omega_x=\omega_y=0$. Так как вращение вокруг неподвижной оси есть частный случай вращения тела вокруг неподвижной точки, то по формулам (3) в этом случае имеем:

$$K_x=-J_{xy}\omega_z;\quad K_y=-J_{yz}\omega_z;\quad K_z=J_z\omega_z. \tag{5}$$

Если ось вращения Oz является главной осью инерции для ее точки O, то $J_{xz}=J_{yz}=0$ и из (5) получаем:

$$K_x=0;\quad K_y=0;\quad K_z=J_z\omega_z. \tag{5'}$$

Кинетический момент для случая главной оси направлен по оси вращения. В других случаях он не направлен по оси вращения. Ось вращения является главной осью инерции для всех своих точек, если она является главной центральной осью инерции.